НЕКОТОРЫЕ ПРОЯВЛЕНИЯ НЕРАВЕНСТВА ЛЕВИ.

Исмаилов Нурулла Туйчибаевич
Д-р фило.тех. наук.(PhD),кафедра высшая математика
Наманганский инженерно-технологический институт,
Республика Узбекистан. г. Наманган

Бахрамов Рустамжон Камбарали углы
Наманганский инженерно-технологический институт,
Республика Узбекистан. г. Наманган
(НамИТИ,преподаватель-стажер)

SOME MANIFESTATIONS OF LEVY'S INEQUALITY.

Ismailov Nurulla Tuychibaevich
Dr. Phil.Tech. Sciences (PhD), Department of Higher Mathematics
Namangan Engineering and Technology Institute,
The Republic of Uzbekistan. Namangan city

Bahramov Rustamjon Kambarali corners
Namangan Engineering and Technology Institute,
The Republic of Uzbekistan. Namangan city
(NamITI, trainee teacher)

Аннатация

Для случая d>1 исследованы неравенства Леви, упомянутые в теоремах статьи, а также неравенства, упомянутые в научных исследованиях О.И.Клёсова, А.Н.Колмогорова и П.Леви.

Annotation

For the case d>1, the Levy inequalities mentioned in the theorems of the article, as well as the inequalities mentioned in the scientific studies of O.I. Klyosov, A.N. Kolmogorov and P. Levy, were studied.

Ключевые слова: медиана случайной величины,лемма Гуту, некоррелированные случайные величины, законе повторных логарифмов.

Key words: median of a random variable, Gutu's lemma, uncorrelated random variables, law of repeated logarithms.

Теорема 1. Пусть $\{X(\bar{k});\bar{k}<\bar{n}\}$ — некоррелированные случайные величины, где мы вводим с $0<\alpha\leq 2$, $0<q<1$. как:

$$M_\alpha = \sum_{\bar{k}<\bar{n}} E|X(\bar{k})|^\alpha$$

Тогда для всех x>0 справедливо неравенств

$$P(\max_{\bar{k}<\bar{n}} S(\bar{k}) \ge x) \le q^{-d} P(S(\bar{n}) \ge -d(\frac{M_\alpha L}{1-q})^{\frac{1}{\alpha}}), \qquad (1)$$

где L=1, если $0<\alpha\le 1$, или и L=2, если $0<\alpha\le 2$.

Теорема 2. Пусть $\{X(\bar{k}); \bar{k}<\bar{n}\}$ — независимые случайные величины, $EX(\bar{k})=0$, $B(\bar{n})=\sum_{\bar{k}<\bar{n}} EX^2(\bar{k})$, тогда уместно следующее:

$$P(\max_{\bar{k}<\bar{n}} S(\bar{k}) \ge x) \le q^d P(S(\bar{n}) \ge x - d\sqrt{2B(\bar{n})}),$$

$$P(\max_{\bar{k}<\bar{n}} S(\bar{k}) \ge x) \le q^{-d} P(S(\bar{n}) \ge x - d\sqrt{2B(\bar{n})}) \qquad (2)$$

Теорма3. Если для кого-то $c \ge 0$, $q>0$

если так, то $P(S(\bar{n}) - S(\bar{k}) \ge -c) \ge q \quad (\bar{k}<\bar{n})$,

$$P(\max_{\bar{k}<\bar{n}} S(\bar{k}) \ge x) \le q^{-d} P(S(\bar{n}) \ge x - cd) \qquad (3)$$

Мы знаем, что при $\forall$ x>0 справедливо неравенство Леви

$$P\{\max_{1\le k\le n} [S_k - \mu(S_k - S_n)] \ge x\} \le 2P(S_n \ge x) \qquad (4)$$

где μ(x)-X – медиана случайной величины.

Из этого неравенства, если выполнены следующие дополнительные условия, то при x>0

$$P\{Sn \ge x\} \le 2P\{Sn \ge x-(2\ \} \qquad (5)$$

мы генерируем.

(4) неравенство было получено А. Н. Колмогоровым в законе повторных логарифмов.

Теорема 4. Предположим, что $X_1,\dots,X_n$ — независимые случайные величины и $EX_i=0$, $EX_i^2<\infty$ для i= 2,...,n.

Вводим следующее:

$$D = \sum_{i=1}^{n} EX_i^2 \quad ,$$

то для $\forall$ q, 0<q<1 и $\forall$ x >0 справедливо следующее неравенство:

$$P\{\max_{1 \le k \le n} S_k \ge x\} \le \frac{1}{q} P\{S_n \ge x - (\frac{D}{1-q})^{\frac{1}{2}}\} \qquad (6)$$

отсюда следует из (5) по (6), когда q= $\frac{1}{2}$ найдено.

Теорема 5. Если для s≥0 и q>0 P{Sn-Sk≥-c}≥q , k=1,…,n-1, если неравенство выполнено, то при x > 0 справедливо соотношение:

$$P\{\max Sk \ge x \} \le P(Sn \ge x-s) \qquad (7)$$

где μ(x)-X – медиана случайной величины.

Из этого неравенства, если выполнены следующие дополнительные условия, то при x>0

$$P\{Sn \ge x\} \le 2P\{Sn \ge x-(2 \} \qquad (8)$$

мы генерируем.

Теорема 6. Пусть >1 и $\{X_k,\ k \in Z_+^d\}$ — независимые и нормально распределенные случайные величины и для них выполнены следующие условия.

E(X) = 0 и $S_n = \sum_{k \le n} X_k, n \in Z_+^d$. В этом случае одинаково сильны следующие связи:

$$E\exp\{(\log|X|)^{\alpha/\beta}\}(\log^+|X|)^{d-1} < \infty;$$

$$\sum_n \exp\{(\log|n|)^{\alpha/\beta}\} \cdot \frac{(\log|n|)^{\alpha-1}}{|n|^2} P(|S_n| > |n|^\beta \varepsilon) < \infty \quad \varepsilon > 1$$ когда,

$$\sum_n \exp\{(\log|n|)^{\alpha/\beta}\} \cdot \frac{(\log|n|)^{\alpha-1}}{|n|^2} P(\max_{k \le n} |S_k| > |n|^\beta \varepsilon) < \infty \quad \varepsilon > 1$$ когда,

$$\sum_n \exp\{(\log|n|)^{\alpha/\beta}\} \cdot \frac{(\log j)^{\alpha-1}}{j^2} P(\sup_{j \le |k|} |S_k / |k^\beta|| > \varepsilon) < \infty \quad \varepsilon > 1$$ когда.

Теорема 7. Пусть $0<\alpha<1$, $\{X_k,\ k\in Z_+^d\}$— независимые и нормально распределенные случайные величины и для них выполнены следующие условия.

$E(X) = 0$ va $S_n=\sum_{k\le n}X_k, n\in Z_+^d$ +.

В этом случае одинаково сильны следующие связи:

$E\exp\{|X|)^{\alpha/\beta}\}(\log^-|X|)^{d-1}<\infty;$

$\sum_n \exp\{|n|^\alpha\}\cdot|n|^{\alpha-2}P(|S_n|>|n|\varepsilon)<\infty \quad \varepsilon>1$ когда,

$\sum_n \exp\{|n|^\alpha\}\cdot|n|^{\alpha-2}P(\max_{k\le n}|S_k|>|n|^\beta\varepsilon)<\infty \quad \varepsilon>1$ когда,

$\sum_n \exp\{j^\alpha\}\cdot j^{\alpha-2}P(\sup_{j\le k}|S_k/|k^\beta||>\varepsilon)<\infty \quad \varepsilon>1$ когда.

Для доказательства теорем используем приведенную выше лемму и следующие леммы.

Лемма 1. Для случайной величины X и $\gamma>0$,

$E\exp\{(\log^+|X/\gamma|)^{\alpha/\beta}\}(\log^+|X|)^{d-1}<\infty$

$\Leftrightarrow\sum_n \exp\{(\log|n|)^\alpha\}\dfrac{(\log|n|)^{\alpha-1}}{|n|}P(|X|>|n|\gamma)<\infty;$

$E\exp\{|X/\gamma|^\alpha\}(\log^+|X|)^{d-1}<\infty\Leftrightarrow\sum\exp\{|n|^\alpha\}\cdot|n|^{\alpha-1}P(|X|>|n|\gamma|<\infty.$

При доказательстве лемм мы используем вычисления на основе следующих стандартных перестановок.

$\sum_n=\sum_{j=1}^{\infty}\sum_{|n|=j}d(j)\ldots,$ $\quad d(j)=Card\ \{k:|k|=j\},\ \ j\ge1.$ если мы уточним, то

$$\sum_n \exp\{|n|)^\alpha\}\cdot|n|)^{\alpha-1}P(|X|>|n|=\sum_{j=1}^{\infty}d(j)\exp\{j^\alpha\}\cdot j^{\alpha-1}P(|X|>¿j),¿\sum_n\exp\{(\log|n|^\alpha\}\frac{(\log^+|n|)^{\alpha-1}}{|n|}P(|X|>|n|=\sum_{j=1}^{\infty}d(j)\exp\{(\log j)^\alpha\}\frac{(\log j)^{\alpha-1}}{j}P(|X|>¿j).¿$$

будет.

Также, $M(j)=Card\ \{k:|k|=j\}\ \ (=\sum_{k=1}^{j}d(k))\ \ j\ge1,$ и $\dfrac{M(j)}{j(\log j)^{d-1}}\to\dfrac{1}{(d-1)!}\ \ as\ \ j\to\infty.$ и будет.

Доказательства теорем (6)–(7) следуют из этих соотношений и замен, как и в предыдущем параграфе. Пусть Z^d_+-n -мерное арифметическое пространство, элементы которого состоят из целых положительных чисел. Введем понятие частичного порядка в Zd+:

Если $\bar{m}=(m,m\ldots m_d)$ и $\bar{n}=(n,n\ldots n_d)$ будет, $m_i \le n_i; i=\overline{i,d}$ если, $\bar{m}<\bar{n}$

Это записывается как Кроме того, если каждый i (i=i, d) равен $n_i \to \infty$, то это $\bar{n}\to\infty$.

Теорема 8. X и $\{X(\bar{n}), \bar{n}\in Z^d_+\}$ являются независимыми и нормально распределенными случайными величинами, для которых выполнено следующее условие: $EX(\bar{n})=0,\ EX^2(\bar{n})=1$ и $S(\bar{n})=\sum_{k<n} X(\bar{n}),$

а также быть, $\sigma^2(n)=VarX\cdot I\{|X|\le\sqrt{|n|}\}$ где $I\{|X|\le\sqrt{|n|}\}$ находится индикатор события.

Если так $EX^{2(2-\alpha)}\exp(X)(\log^+|X|)^{d-1}<\infty$, то

$$\sum_{\bar{n}}\frac{n^2}{|\bar{n}|^\alpha}Sup|P(\frac{S(\bar{n})}{\sqrt{|\bar{n}|}}\le X)-\phi(\frac{X}{\sigma})|<¿$$ (1) становится где log+x=max(0, logx)

Доказательство теоремы.

Для доказательства теоремы мы используем следующие результаты теории чисел. $d(j)=card\{\bar{k}, |\bar{k}|=j\}$ и $M(j)=card\{\bar{k}, |\bar{k}|\le j\}$

Согласно [2] $j\to\infty$ $M(j)\approx\frac{j(\log j)^{d-1}}{(d-1)!}$, (9)

Также $\forall\ \delta<0$ и $j\to\propto¿¿\ d(J)=0(J^b)$

Согласно Гуту [3], (1) можно записать следующим образом

$$\sum\frac{e^n}{|n|^\alpha}Sup|P(\frac{S(n)}{\sqrt{|n|}}\le x)-\varphi(\frac{x}{\sigma_n})|=\sum_{j=1}^{\infty}\frac{e^n d(j)}{j^\alpha}Sup|P(\frac{S(\pi(j)}{\sqrt{j}}\le x)-\varphi(\frac{x}{\sigma_n})|$$ (10)

Для доказательства теоремы воспользуемся следующими леммами [3].

В лемме 2 имеют место следующие соотношения:

$$\sum_{j=1}^{k} d(j)j^{\alpha} \le Ck^{\alpha+1}(\log k)^{d-1};\ (j > -1) \quad (11)$$

$$\sum_{j=1}^{k} \frac{d(j)(\log j)^{\delta}}{j} \le C\cdot(\log k)^{d+\delta};\ (\delta \ge -1) \quad (12)$$

$$\sum_{j=1}^{k} \frac{d(j)(\log j)^{\delta}}{j^{\alpha}} \le C\cdot\frac{(\log k)^{d-1+\delta}}{(\gamma-1)k^{\gamma-1}},\ (\gamma > 1,\ -\infty < \delta < \infty) \quad (13)$$

Лемма 3. ξ - является неотрицательной случайной величиной, то при r>0 справедливо соотношение: $\sum_{j=1}^{\infty} d(j)j^{r-1}P(\xi > j) < \infty \Leftrightarrow E\xi^{r}(\log^{+}\xi)^{d-1} < \infty$

Теперь докажем соотношение (1): для доказательства соотношения (1) достаточно доказать аппроксимацию следующего ряда.

$$\sum\nolimits_0 = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{e^{n}d(j)}{j^{\alpha}} \sup_x |P(\frac{S(\pi(j))}{\sqrt{j}} \le x) - \varphi(\frac{x}{\sigma_j})| < \infty$$

Используем следующее неравенство [3]:

$$|P(\frac{S\pi(j)}{\sqrt{j}} \le x) - P(\frac{S_j'}{\sqrt{j}} \le x)| \le jP(|x| > \sqrt{j}) \quad (14)$$

справедливо неравенство.Согласно этому неравенству:

$$\sum_{j=1}^{\infty} \frac{e^{n}d(j)}{j^{\alpha}} \sup_x |P(\frac{S\pi(j)}{\sqrt{j}} \le x) - \varphi(\frac{x}{\sigma_j})| \le \sum_{j=1}^{\infty} \frac{e^{n}d(j)}{j^{\alpha-1}} |P(|X| > \sqrt{j}) +$$

$$\sum_{j=1}^{\infty} \frac{e^{j}d(j)}{j^{\alpha}} \sup_x |P(\frac{S_j'}{\sqrt{j}} \le x) - \varphi(\frac{x-\mu_i\sqrt{j}}{\sigma_j})| + \sum_{j=1}^{\infty} \frac{e^{j}d(j)}{j^{\alpha}} \sup_x |\varphi(\frac{x-\mu_i\sqrt{j}}{\sigma_j} - \varphi(\frac{x}{\sigma_j})| = \sum\nolimits_1 + \sum\nolimits_2 + \sum\nolimits_3.$$

$\sum_1, \sum_2, \sum_3$ оценим.

$$\sum\nolimits_1 = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{e^{j}d(j)}{j^{\alpha-1}} P(|X| > \sqrt{j}) = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{e^{j}d(j)}{j^{\alpha-1}} \sum_{k=j}^{\infty} P(\sqrt{k} < |X| < \sqrt{k+1}) =$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} P(\sqrt{k} < |X| < \sqrt{k+1}) \sum_{j=1}^{k} \frac{e^{j}d(j)}{j^{\alpha-1}} = \sum_{k=1}^{\infty} P(\sqrt{k} < |X| < \sqrt{k+1}) \sum_{j=1}^{k} j^{\alpha-1}e^{j}d(j) \le$$

$$\leq C\cdot\sum_{k=1}^{\infty}\kappa^{2-\alpha}e^{k}(\log^{+}k)^{d-1}P(\sqrt{k}<|X|<\sqrt{k+1})\leq C\cdot E|X|^{2(2-\alpha)}\exp(X\ )(\log^{+}|X|)^{d-1}<\infty$$

$\sum_2$ оцениваем.

Согласно неравенству Эссена [3] :

$$\sup_x|P(\frac{s_j'}{\sqrt{j}}\leq x)-\varphi(\frac{x-\mu_j\sqrt{j}}{\sigma_j})|\leq C\frac{E|Y_{ij}-\mu_j|^3}{\sqrt{j}\sigma_j^3}\leq C\frac{8E|Y_{ij}|^3}{\sqrt{j}\sigma_j^3}$$

Отсюда, согласно (12),

$$\leq C+C\sum_{j\geq j_0}^{\infty}\frac{e^{j}d(j)}{j^{\alpha+\frac{1}{2}}}\int_{|x|=\sqrt{j}}|x|^3\,dF(x)\leq C+C\int_0^{\infty}(\sum_{j\geq x^2}\frac{e^{j}d(j)}{j^{\alpha}+\frac{1}{2}})|x|^3\,dx\leq$$

$$\sum_2\leq C\sum_{j=1}^{\infty}\frac{e^{j}d(j)}{j^{\alpha}}\cdot\frac{E|Y_{ij}|^3}{\sqrt{j}\sigma_j^3}\leq C+C\sum_{j\geq j_0}^{\infty}\frac{e^{j}}{j^{\alpha+\frac{1}{2}}}\leq$$

$$\int_0^{\infty}x^{2(2-\alpha)}e^{x}(\log^{+}|x|)^{d-1}dF(x)<\infty,$$

Приближенное исходя из условия теоремы.

Теперь оцениваем. По лемме 1. и по условию теоремы

$$\sum_3\leq\sum_{j=1}^{\infty}\frac{e^{j}d(j)}{j^{\alpha}}\cdot\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\cdot\frac{|\mu_j|\sqrt{j}}{\sigma_j}\leq\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\sum_{j=1}^{\infty}\frac{e^{j}d(j)}{j^{\alpha-\frac{1}{2}}}\cdot\frac{1}{\gamma_j}\int_{|x|\geq\sqrt{j}}|x|\,dF(x)\leq$$

$$\leq 2+2\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\sum_{j\geq j_0}^{\infty}\frac{e^{j}d(j)}{j^{\alpha-\frac{1}{2}}}\int_{|x|\geq\sqrt{j}}|x|\,dF(x)\leq C+C\int_0^{\infty}(x^{2(2-\alpha)}e^{x}(\log^{+}|x|)^{d-1}dF(x)<\infty$$

Теорема полностью доказана.

В заключение.

Доказанная теорема вытекает из частного случая, т. е. теоремы при [3]

Список литературы

1. Королюк В.С. Граничные задачи для сложных пуассоновских процессов. Киев, Наукова думка, 1975.

2.Братийчук В.С. Гусак Д.В. Граничные задачи для процессов с независимыми приращениями. Киев, Наукова думка ,1990.

3.Лотов В.И. О достижении высокого уровня блужданием с задержкой в нуле. Сибирский матем. журн ,1999,том 40, номер 6, стр.1276-1288 .

4.Барон М. И. О моменте первого достижения для процессов ожидания. Теория вероят. и ее примен. 1996 , Том 41, выпуск 2, стр. 396-403.

5.Khodjibayev V.R. Asymptotic representations for characteristics of exit from an interval for stochastic processes with independent increments. Siberian Adv. Math ,1997 ,T. 7, №3, pp.75-86.