УДК 517.518.14

Нгуен Ван Куинь
Кандидат физико-математических наук, старший преподаватель
Факультета фундаментальной науки,
университет Ханой промышленности, Ha Noi, Вьетнам.
E-Mail: nguyenvanquynh@haui.edu.vn.
Нгуен Ван Мань
Магистр математических наук, старший преподаватель
Факультета фундаментальной науки, университет Ханой
промышленности, Ha Noi, Вьетнам.
E-Mail: nvmanhhhn@haui.edu.vn.

СВОЙСТВА МНОЖЕСТВ РАДОНОВЫХ МЕР

Аннотация: *Теория меры играет важную роль в теории субгармонических и δ-субгармонических функций. Классические свойства меры были представлены во многих монографиях, например в [1]. В статье представляется усиление варианта Азарина теоремы об компактном множестве в пространстве радоновых мер. Результаты нашей статьи позволяют несколько упростить конструкции из этих работ.*

Ключевые слова: *мера Хана, мера Жордана, сингулярная положительная мера, линейный непрерывный функционал, радоновая мера* .

Nguyen Van Quynh.
PhD in Physics and Mathematics, Lecturer
Faculty of Basic Science, Hanoi University of Industry, Ha Noi, Vietnam
E-Mail: nguyenvanquynh@haui.edu.vn.
Nguyen Van Manh.
Master of Mathematical Sciences, Lecturer
Faculty of Basic Science, Hanoi University of Industry, Ha Noi, Vietnam.
E-Mail: nvmanhhhn@haui.edu.vn.

PROPERTIES OF SETS OF RADON MEASURES

Abstract: *Measure theory plays an important role in the theory of subharmonic and δ-subharmonic functions. The classical properties of a measure have been presented in many monographs, for example, in [1]. In the article we sharpen Azarin's variant of the theorem on a compact set in the space of Radon measures. The results of our article allow us to simplify the constructions from these articles somewhat.*

Key words: *Hahn measure, Jordan measure, singular positive measure, linear continuous functional; Radon measures, compact set.*

Сначала вводим некоторые обозначения:

$\mathbb{R}_0^n = \mathbb{R}^n \backslash \{0\}$; $C(z_0, r) = \{z: \|z - z_0\| < r\}$; $B(z_0, r) = \{z: \|z - z_0\| \leq r\}$.

Φ – это линейное пространство непрерывных финитных функций на $\mathbb{R}_0^n$. Будут рассматриваться как вещественные, так и комплексные пространства Φ.

Напомним теперь некоторые определения и результаты из теории интеграла и меры.

Пусть в пространстве $\mathbb{R}_0^n$ определена вещественная борелевская мера μ, $E \subset \mathbb{R}_0^n$ – борелевское множество. Ограничением (сужением) меры μ на множество E называется мер μ_E, которая определяется формулой $\mu_E(A) = \mu(A \cap E)$ для любого борелевского мно-жества $A \subset \mathbb{R}_0^n$.

Величина $|\mu| = \mu_+ + \mu_-$, называется полной вариацией или модулем меры μ.

Вещественная борелевская мера μ на $\mathbb{R}_0^n$ называется локально конечной, если для любого компакта $K \subset \mathbb{R}_0^n$ выполняется неравенство $|\mu|(K) < \infty$.

Обозначим через $\mathfrak{M}_1$ семейство функций множеств , представимых в виде $\mu = \mu_1 - \mu_2$, где μ_1, μ_2 вещественные локально конечные борелевские меры на $\mathbb{R}_0^n$. функция μ определена на борелевских множествах $E \subset \mathbb{R}_0^n$ за исключением тех E, для которых $\mu_1(E) = \mu_2(E)$.

Теорема 1. (С.М [4]). Всякий элемент $\mu \in \mathfrak{M}_1$ эквивалентен разности $\mu_1 - \mu_2$, где где μ_1 и μ_2 – положительные взаимно сингулярные локально конечные борелевские меры на $\mathbb{R}_0^n$. Причем μ_1 и μ_2 определяются однозначно.

Вещественной радоновой мерой на $\mathbb{R}_0^n$ называется класс эквивалентных элементов из множества $\mathfrak{M}_1$. Множество таких мер обозначим $\mathfrak{R}$.

Из теоремы 1 легко следует, что множество $\mathfrak{R}$ является вещественным линейным пространством. Проверить это свойство, исходя из определении $\mathfrak{R}$, достаточно затруднительно.

Мы будем рассматривать также комплексные меры Радона. Это функции множеств вида $\mu = \mu_1 + i\mu_2$, где μ_1 , μ_2 – вещественные радоновые меры. Ограничение меры μ на множество E определяется по формуле $\mu_E = (\mu_1)_E + i(\mu_2)_E$. Комплексная мера Радона μ сосредоточена на множестве E, если выполняется равенство $\mu = \mu_E$.

Обозначим через $\mathfrak{R}_C$ – это множество комплексных радоновых мер на $\mathbb{R}_0^n$. Отметим, что $\mathfrak{R}_C$ является комплексным линейным пространством. В пространстве $\mathfrak{R}_C$ вводится понятие широкой сходимости. Говорят, что последовательность радоновых мер μ_m широко сходится к радоновой мере μ , если для любой функции $\varphi \in \Phi(\mathbb{R}_0^n)$ числовая последовательность $\mu_m(\varphi)$ сходится к $\mu(\varphi)$. Обозначение $\mu = \lim\limits_{m\to\infty} \mu_m$.

Вводятся некоторые понятия множеств, связанные с пространством $\mathfrak{R}_C$.

Множество $E \subset \mathfrak{R}_C$ называется широко ограниченным, если для любой функции $\varphi \in \Phi(\mathbb{R}_0^n)$ выполняется неравенство $\sup\limits_{\mu\in E}|\mu(\varphi)| < \infty$.

Множество $E \subset \mathfrak{R}_C$ называется сильным ограниченным, если для любого компакта $K \subset \mathbb{R}_0^n$ выполняется неравенство $\sup\limits_{\mu\in E}|\mu|(K) < \infty$.

Множество $E \subset \mathfrak{R}_C$ называется компактным, если из любой последовательности $\mu_m \subset E$ можно извлечь широко сходящуюся подпоследовательность.

Компактный множество в $\mathfrak{R}_C$, содержащее пределы широко сходящихся последовательностей элементов этого множества, называется компактом.

Теорема 2. (СМ. [5]) Всякая широко ограниченное множество в $\mathfrak{R}_C$ является сильно ограниченным множеством.

Для множества положительных мер признак сильной ограниченности можно усилить.

Теорема 3. Пусть E – множество положительных радоновых мер на $\square_0^n$, Φ_1 – всюду плотно множество в пространстве $\Phi\left(\square_0^n\right)$. Тогда если множество $\left\{\left|(\mu,\varphi)\right|:\mu\in E\right\}$ ограничено для любой функции $\varphi\in\Phi_1$, то множество E сильно ограничено.

Доказательство. Пусть $K\subset\square_0^n$ – компакт. В множестве Φ_1 найдётся такая функция φ, что будет выполняться неравенство $\chi_K(z)=\varphi(z)$. Пусть $\mu\in E$. Тогда

$$\mu(K)=\int\limits_{\square_0^n}\chi_K(z)d\mu(z)\le\int\limits_{\square_0^n}\varphi(z)d\mu(z)\le\sup\left\{(\mu,\varphi):\mu\in E\right\}.$$

Из этого следует утверждение теоремы. Теорема доказана.

Из теоремы 2 вытекает следующее утверждение.

Теорема 4. Если $E\subset\mathsf{M}$ есть широко ограниченное множество, то для каждого компакта $K\subset\square_0^n$ существует константа M такая, что $\left|\mu(\varphi)\right|\le M\|\varphi\|$ для любой меры $\mu\in E$ и для любой функции $\varphi\in\Phi$ с носителем, содержащемся в компакте $K\subset\square_0^n$.

Мы продолжим серию теорем связанных с пространством радоновых мер.

Теорема 5. Пусть μ_m – последовательность комплексных борелевских мер, причём мера μ_m сосредоточено на компакте $B(0,m)\setminus C\left(0,\frac{1}{m}\right)$. Пусть для $k\ge m$ ограничение μ_k на компакте $B(0,m)\setminus C\left(0,\frac{1}{m}\right)$ совпадает с μ_m. Тогда существует радонова мера μ такая, что

ограничение μ на кампакте $B(0,m)\setminus C\left(0,\frac{1}{m}\right)$ совпадает с μ_m.

Доказательство. Так как по определению комплексной меры выполняется равенство $\mu_m=\mu_{1,m}+i\mu_{2,m}$, где $\mu_{1,m},\mu_{2,m}$ –конечные вещественные борелевские меры, то теорему достаточно доказать для случая, когда μ_m – последовательность конечных вещественных борелевских мер. Для этого случая утверждение следует из рассуждений, приведенных в доказательстве теоремы 3.1, относящихся к изучению свойств последовательности γ_m.

Теория 6. Пусть $\mu \in \Re_C, \varPhi_1 -$ всюду плотное множество в пространство $\varPhi(\mathbb{R}_0^n)$. Если для любой функции $\varphi \in \varPhi_1$ выполняется равенство $(\mu, \varphi) = 0$, то $\mu = 0$.

Доказательство.

Докажем теорему от противного. Пусть теорема не верна и $\mu = \mu_1 + i\mu_2 \neq 0$. Пусть, например $(\mu_1)_+ \neq 0$ и пусть $\mathbb{R}_0^n = A \bigcup B$ – разложение Хана для меры μ_1 (из доказательство теоремы 3.1. следует, что существует разложение Хана для радоновой меры). Тогда существует компакт $K \subset A$ такой, что $(\mu_1)_+(K) = 4m > 0$. Пусть $\psi \in \varPhi(\mathbb{R}_0^n)$ – функция такая, что $\psi(x) \in [0,1]$, $\psi(x)|_K = 1$, $\psi(x) = 0$, при $x \notin (K)_\delta$. Тогда имеем

$$\int\limits_{\mathbb{R}_0^n} \psi(x)\, d\mu_1(x) \geq \mu_1(K) - (\mu_1)_-(K_\delta \setminus K) \geq 2k\,.$$

При достаточно малых δ. Поскольку множество $\varPhi_1$ - всюду плотное множество в пространстве $\varPhi(\mathbb{R}_0^n)$, то существует последовательность функций $\psi_m(x)$ из $\varPhi_1$ такая, что
$\psi_m(x)$ сходится к $\psi(x)$ в пространстве $\varPhi(\mathbb{R}_0^n)$. Имеем

$$\left|\int\limits_{\mathbb{R}_0^n} \psi_m(x)\, d\mu_1(x)\right| \geq \left|\left|\int\limits_{\mathbb{R}_0^m} (\psi_m(x) - \psi(x))\, d\mu_1(x)\right| - \int\limits_{\mathbb{R}_0^m} \psi(x)\, d\mu_1(x)\right|.$$

Так как $\left|\int\limits_{\mathbb{R}_0^m} (\psi_m(x) - \psi(x))\, d\mu_1(x)\right| \leq |\mu_1|(K_\delta)\|\psi_m(x) - \psi(x)\| \leq k$, при $m \geq m_0$.

Из этого следует, что при $m \geq m_0$ выполняется неравенство $\left|\int\limits_{\mathbb{R}_0^n} \psi_m(x)\, d\mu_1(x)\right| \geq k$. Это противоречит равенству

$$\int\limits_{\mathbb{R}_0^n} \psi_m(x)\, d\mu(x) = 0\,.$$

Теорема доказана.

Список литературы

1. Kadets, V.M. (2006), A course of Functional Analysis, Kharkov National University.
2. Van Quynh Nguyen (2015), Various Types of Convergence of Sequences of Subharmonic Functions, Zh. Mat. Fiz. Anal. Geom,Volume 11, Number 1, 63–74.
3. Nguyen Van Quynh, Theorem on uniform continuity of Logarithmic potential, Visnyk of science and education, Issue 5 (59), 6-10p.
4. Nguyen Van Quynh, Le Anh Thang (2021), THEOREM ON THE REPRESENTATION MEASURES "Мировая наука" №3 (48) 2021.
5. Nguyen Van Quynh, Le Anh Thang (2021), THEOREM ON A COMPACT SET IN THE SPACE OF RADON MEASURES "Мировая наука" №11 (56) 2021.