УДК 517.518.14

Нгуен Ван Куинь

Кандидат физико-математических наук, старший преподаватель

Факультета фундаментальной науки,

университет Ханой промышленности, Ha Noi, Вьетнам.

E-Mail: nguyenvanquynh@haui.edu.vn.

ТЕОРЕМА О ПРЕДСТАВЛЕНИИ СУБГАРМОНИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

Аннотация: *Теорема о представлении играет важную роль в теории субгармонических и delta-субгармонических функций. Классические свойства меры были представлены во многих монографиях, например в [1]. В статье представляется усиление варианта Азарина теоремы о представлении субгармонических функций. Результаты нашей статьи позволяют несколько упростить конструкции из этих работ.*

Ключевые слова: *Субгармоническая и delta-субгармоническая функция, равномерная непрерывность, абсолютно непрерывная функция.*

Nguyen Van Quynh.

PhD in Physics and Mathematics, Lecturer

Faculty of Basic Science, Hanoi University of Industry, Ha Noi, Vietnam

E-Mail: nguyenvanquynh@haui.edu.vn.

THEOREM ON THE REPRESENTATION OF SUBHARMONIC FUNCTIONS

Abstract: *Theorem on the representation plays an important role in the theory of subharmonic and delta-subharmonic functions. The classical properties of a measure have been presented in many monographs, for example, in [1]. In the*

article we sharpen Azarin's variant of the theorem on the representation of subharmonic functions. The results of our article allow us to simplify the constructions from these articles somewhat.

Key words: *subharmonic and delta-subharmonic functions, uniform continuity, absolutely continuous function.*

Рассматрим функцию такую : $\varepsilon_m(x)=\begin{cases}|x|^{2-m}, m\ge 3\\ \ln\dfrac{1}{|x|}, m=2\end{cases}$

Легко проверим, что при $|x|\ne 0$ $\varepsilon_m(x)$ - гармоническая функция. Действительно,

при $m\ge 3$, $|x|^{2-m}=\left(\sum_{j=1}^{m}x_j^2\right)^{\frac{2-m}{2}}$: $\dfrac{\partial}{\partial x_j}|x|^{2-m}=(2-m)x_j\left(\sum_{j=1}^{m}x_j^2\right)^{\frac{-m}{2}}$, j=1,..,m

$\dfrac{\partial^2}{\partial x_j^2}|x|^{2-m}=-m(2-m)x_j^2\left(\sum_{j=1}^{m}x_j^2\right)^{\frac{-m-2}{2}}+(2-m)\left(\sum_{j=1}^{m}x_j^2\right)^{\frac{-m}{2}}$.Получаем

$$\Delta|x|^{2-m}=\sum_{j=1}^{m}\frac{\partial^2}{\partial x_j^2}|x|^{2-m}=0$$

При m=2, $\ln\dfrac{1}{|x|}=-\dfrac{1}{2}\ln(x_1^2+x_2^2)$: $\dfrac{\partial}{\partial x_j}\ln\dfrac{1}{|x|}=-\dfrac{x_j}{x_1^2+x_2^2}$, j=1,2

$$\frac{\partial^2}{\partial x_1^2}\ln\frac{1}{|x|}=\frac{x_1^2-x_2^2}{(x_1^2+x_2^2)^2};\frac{\partial^2}{\partial x_2^2}\ln\frac{1}{|x|}=\frac{x_2^2-x_1^2}{(x_1^2+x_2^2)^2}.$$

Получаем $\Delta\ln\dfrac{1}{|x|}=\dfrac{\partial^2}{\partial x_1^2}+\dfrac{\partial^2}{\partial x_2^2}=0$.

Обозначим $\theta_m=\begin{cases}2\pi, m=2\\ (m-2)\sigma_m, m\ge 3\end{cases}$, где σ_m-площадь поверхности единичной сферы.

Утверждение.

Функция $\varepsilon_m(x-y)$ удовлетворяет в $D'(R^m)$ уравнению $\Delta_x\varepsilon_m(x-y)=-\theta_m\delta(x-y)$, где $\delta(x)-\delta$-функция Дирака.

Доказательство. Докажем равенство при y = 0. пусть основная функция $\varphi \in D(R^m)$ и $\operatorname{supp}\varphi \subset K \subset\subset R^m$. Имеем $\left(\Delta\varepsilon_m,\varphi\right) = \int \varepsilon_m(x)\Delta\varphi(x)dx = \lim\limits_{\varepsilon\to 0}\int\limits_{|x|\ge\varepsilon}\varepsilon_m(x)\Delta\varphi(x)dx$.

Используя формула Грина, получим :

$$\int\limits_{|x|\ge\varepsilon}\varepsilon_m(x)\Delta\varphi(x)dx = \int\limits_{|x|\ge\varepsilon}\Delta\varepsilon_m(x)\varphi(x)dx + \int\limits_{|x|=\varepsilon}\frac{\partial\varphi}{\partial n}\varepsilon_m ds + \int\limits_{|x|=\varepsilon}\frac{\partial\varepsilon_m}{\partial n}\varphi ds.$$

Используем гармоничность ε_m. Тогда первый интеграл обращается в нуль. Поскольку $\frac{\partial\varphi}{\partial n}$-ограничен, то $\left|\int\limits_{|x|=\varepsilon}\frac{\partial\varphi}{\partial n}\varepsilon_m ds\right| \le \begin{cases} C_1\varepsilon^{2-m}\varepsilon^{m-1}, m\ge 3 \\ C_2\varepsilon\ln\varepsilon, m=2\end{cases} = \begin{cases} C_1\varepsilon \\ C_2\varepsilon\ln\varepsilon\end{cases}\xrightarrow[\varepsilon\to 0]{} 0$,

где C_1,C_2-константы. Далее

$$\int\limits_{|x|=\varepsilon}\frac{\partial\varepsilon_m}{\partial n}\varphi ds \to \begin{cases}\left((2-m)\varepsilon^{1-m}+\bar{0}(1)\right)\int\limits_{|x|=\varepsilon}\varphi ds = (2-m)\sigma_m\varphi(0)+\bar{0}(1) \\ \left(\frac{1}{\varepsilon}+\bar{0}(1)\right)\int\limits_{|x|=\varepsilon}\varphi ds = 2\pi\varphi(0)+\bar{0}(1)\end{cases}$$

Поэтому $\left(\Delta\varepsilon_m,\varphi\right) = -\varphi(0)\theta_m$, что и доказывает утверждение при y=0. очевидно, при замене $\varphi(x)$ на $\varphi(x-y)$ получим соотношение в общем случае.

Пусть $G(x,y,\Omega)-$функция Грина для области Ω с гладкой границей. Функция Грина, как известно, обладает свойствами:

1) $G(x,y,\Omega)>0,(x,y)\in\Omega\times\Omega; G(x,y,\Omega)=0,(x,y)\in\partial\Omega\times\Omega.$

2) $G(x,y)=G(y,x)$.

3) $G(x,y)=\varepsilon_m(x-y)+H_m(x,y)$, где $H_m(x,y)$- гармоническая в Ω по x и по y .

Из 3) следует, что верно соотношение $\Delta_x G(x,y) = -\theta_m\delta(x-y)$

Рассмотрим последовательность $H(x,u_n)$ функций, гармонических в $K\subset G$ и таких, что они совпадают с семейством непрерывных на ∂K функций u_n, которое монотоно убывая, сходится к u. Такое семейство u_n существует вследствие полунепрерывности u.

Последовательность $H(x,u_n)$ сходится монотоно к гармонической функции H(x) = H(x,u,K), которая зависит только от u.

Утверждение. H(x,u,K) – является наилучшей гармонической мажорантой субгармонической функции u(x) .

Пусть функция $\omega(t)=\begin{cases} C_m e^{\frac{-1}{1-t^2}}, t\in(-1,1) \\ 0, t\notin(-1,1)\end{cases}$ причем C_m выбрано так, чтобы выполнялось условие $\int_0^1 t^{m-1}\omega(t)dt=\frac{1}{\sigma_m}$. Обозначим $\omega_\varepsilon=\varepsilon^{-m}\omega\left(\frac{|x|}{\varepsilon}\right)$.

Рассмотрим функцию $u_\varepsilon(x)=u*\omega_\varepsilon=\int_{R^m} u(x+y)\omega_\varepsilon(y)dy$, u(x) – субгармоническая в области G функция.

Утверждение. Верно соотношение $u_\varepsilon(x)\downarrow u(x)$.

Пусть μ – распределение масс, такое что $\operatorname{supp}\mu\subset K$. Функция $\Pi(x,\mu,K)=\int_K G(x,y,K)d\mu_y$ называется потенциалом Грина распределения масс μ.

Справедливо равенство $\Delta\Pi=-\theta_m\mu$ в $D'(K)$. Так как для $\varphi\in D(K)$ имеем

$$(\Delta\Pi,\varphi)=(\Pi,\Delta\varphi)=\int\left(\int_K G(x,y)d\mu_y\right)\Delta\varphi(x)dx=\int_K\left(\int G(x,y)\Delta\varphi(x)dx\right)d\mu_y=\int_K(\Delta_x G,\varphi)d\mu_y=$$

$-\int\varphi(y)\theta_m d\mu_y=-\theta_m(\mu,\varphi)$. Т.К по свойству функции Грина $(\Delta_x G(x,y),\varphi)=-\theta_m(\delta(x-y),\varphi)=-\theta_m\varphi(y)$.

Утверждение. Пусть обобщенная функция μ^* положительна в $D'(G)$. Тогда существует единственная мера μ такая, что $(\mu^*,\varphi)=\int\varphi(x)d\mu_x$ (мера μ и обобщенная функция μ^* называется эквивалентными).

Пусть u(x) – субгармоническая в области G функция, обозначим через μ_u обобщенную функцию $\mu_u=\frac{1}{\theta_m}\Delta u>0$ и эквивалентное ей распределение масс.

Теорема (Рисс Ф.). Пусть u(x) – субгармоническая в области G функция, $K \subset G, \partial K$ гладкая поверхность. Тогда $u(x) = H(x,u,K) - \Pi(x,\mu_x,K)$,где H(x,u,K) – наилучшая гармоническая мажоранта u(x) в K.

Доказательство. Применяя оператор Лапласа в $D'(G)$ к функции

$$H(x) = u(x) + \Pi(x,\mu_x,K) \quad (*)$$

получаем по свойству потенциала $\Delta H = \Delta u - \theta_m \mu_u = \Delta u - \Delta u = 0$.

Значит, она почти всюду совпадает с бесконечно диференцируемой, гармонической функцией. Но так как справа стоит функция, однозначно определяемая своими значениям почти всюду(если u(x) = v(x) почти всюду то u(x) ≡ v(x)), то H(x) всюду совпадает с бесконечно диференцируемой, гармонической функцией в обычном смысле.

Покажем, что H(x) - наилучшая гармоническая мажоранта. Заметим, что если $\mu_n \to \mu$ в $D'(G)$, то $\underline{\lim}_{n\to\infty} \int G(x,y,K)d\mu_n \geq \int G(x,y,K)d\mu \, (1)$. Действительно, пусть

$G_N = \begin{cases} G(x,y,K), если G(x,y,K) \leq N \\ N, если G(x,y,K) \geq N \end{cases}$ непрерывна в K. Тогда $\lim_{n\to\infty} \int G_N d\mu_n = \int G_N d\mu$ и значит

$\underline{\lim}_{n\to\infty} \int G d\mu_n \geq \lim \int G_N d\mu_n = \int G_N d\mu$ переходя к пределу при $N \to \infty$, получим (1).

Запишем представление u_ε - усреднения u по формуле $u_\varepsilon(x) = H(x,u_\varepsilon,K) - \Pi(x,\mu^\varepsilon,K)$. При $\varepsilon \downarrow 0$ получаем $u(x) = H(x,u,K) - \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \Pi(x,\mu^\varepsilon,K)$ причем предел потенциала существует , т.к существуют остальных слагаемых.

Заметим, что $H(x,u,K)$ - наилучшая гармоническая мажоранта u(x) в K. Так как семейство $H(x,u_\varepsilon,K)$ функций, гармонических в K и таких, что на ∂K они совпадают с семейством $u_\varepsilon(x)$, которое монотоно убывая, сходится к u(x).

Так как по (1) $\lim_{\varepsilon \downarrow 0} \Pi(x,\mu^\varepsilon,K) \geq \Pi(x,\mu_u,K)$, то $H(x) \leq H(x,u,K)$.

С другой стороны, из равенства (*) следует,что $u(x) \le H(x)$ и, значит, $H(x) \ge H(x,u,K)$.

Получаем $H(x) \equiv H(x,u,K)$. Теорема доказана.

Список литературы

1. Kadets, V.M. (2006), A course of Functional Analysis, Kharkov National University.
2. Van Quynh Nguyen (2015), Various Types of Convergence of Sequences of Subharmonic Functions, Zh. Mat. Fiz. Anal. Geom,Volume 11, Number 1, 63–74.
3. Nguyen Van Quynh, Theorem on uniform continuity of Logarithmic potential, Visnyk of science and education, Issue 5 (59), 6-10p.
4. Nguyen Van Quynh, Le Anh Thang (2021), THEOREM ON THE REPRESENTATION MEASURES "Мировая наука" №3 (48) 2021.